Równania różniczkowe cząstkowe

Przykład 1 $\quad u_x(x,t)=2t+e^{2x}$; $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=2t+e^{2x}$

Całkując obustronnie otrzymujemy

$$u(x,t)=\int(2t+e^{2x})dx=\int 2t\,dx+\int e^{2x}dx=2tx+$$
$$+\frac{1}{2}e^{2x}\quad\left(\begin{array}{c}\text{sprawdzenie}\\ \frac{\partial u}{\partial x}=2t+e^{2x}\end{array}\right)$$

Zamiast stałej całkowania używamy dowolnej funkcji zależnej od zmiennej po której nie całkowaliśmy a więc w naszym przypadku zmiennej t

Zatem

$$\underline{u(x,t)=2tx+\frac{1}{2}e^{2x}+f(t)}$$

Przykład 2 $\quad u_{xx}(x,t)=2$; $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=2$

Całkując względem x otrzymujemy $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+f(t)$

Po drugim całkowaniu wzgl. x mamy

$$u(x,t)=2\frac{x^2}{2}+xf(t)+g(t)$$

ostatecznie

$$\underline{u(x,t)=x^2+x\cdot f(t)+g(t)}$$

Przykład 3 $\quad u_{xt}+3u_x=1$; $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}+3\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=1$

Wprowadzamy pomocniczą funkcję $v(x,t)=u_x$ i sprowadzamy równanie do postaci $v_t+3v=1$

Jest to r-nie liniowe pierwszego rzędu. Mnożymy je przez czynnik całkujący e^{3t} i otrzymujemy $e^{3t}v_t+3e^{3t}\cdot v=e^{3t}$

$$(e^{3t}v)_t=e^{3t}$$

Stąd $e^{3t}v=\int e^{3t}=\frac{1}{3}e^{3t}+f(x)$ bo po x nie całkowaliśmy

Mnożąc stronami przez e^{-3t} otrzymujemy

$$v=\frac{1}{3}+e^{-3t}\cdot f(x)$$

Ponieważ $v(x,t) = u_x(x,t)$ wtąc w ścisłym funkcji $u(x,t)$ ostatnie równanie to

$$u_x(x,t) = \frac{1}{3} + e^{-3t} \cdot f(x)$$

Po scałkowaniu wzgl. * otrzymujemy

$$u = \frac{1}{2}x + e^{-3t}\int f(x)dx + g(t) = \frac{1}{3}x\, e^{-3t} \cdot f_1(x) + g(t)$$

gdzie $f_1(x)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f, a $g(t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją zmiennej t.

Przykład 4

$$u_{xy} = 4xy \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy$$

Całkujemy wzgl. y i otrzymujemy $u_x = 2xy^2 + f(x)$

gdzie f - dowolna funkcja zmiennej x.

Całkujemy wzgl. x i otrzymujemy:

$$u = x^2y^2 + f(x) + g(x) \quad \text{gdzie}$$

f i g są dowolnymi funkcjami klasy C^1.

Przykład 5

$$u_x(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$u(x,y) = \int 1dx + f(y) = x + f(y)$$

Przykład 6

$$u_{yy}(x,y) = 6xy \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xy$$

$$u_y(x,y) = \int 6xy\,dy = 6x \cdot \frac{y^2}{2} + f(x) = 3xy^2 + f(x)$$

$$u(x,y) = \int (3xy^2 + f(x))dy = \frac{3xy^3}{3} + f(x) \cdot y + g(x) =$$

$$= xy^3 + y \cdot f(x) + g(x)$$

Przykład 7

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) = 6x \\ u(0,y) = y \\ u(1,y) = y^2 + 1 \end{cases}$$

$$u_x(x,y) = \int 6x\,dx = 3x^2 + f(y)$$

$$u(x,y) = \int (3x^2 + f(y))\,dx = \frac{3x^3}{3} + x \cdot f(y) + g(y) = x^3 + x \cdot f(y) + g(y)$$

$$u(0,y) = g(y) = y$$

$$u(1,y) = 1 + 1 \cdot f(y) + g(y) = y^2 + 1$$

$$\cancel{1} + f(y) + y = y^2 + \cancel{1}$$

$$f(y) = y^2 - y$$

Więc $u(x,y) = x^3 + x(y^2 - y) + y$

Przykład 8

$$\begin{cases} y \cdot u_{yy} + u_y = 0 \\ u(x,1) = x^2 \\ u(x,e) = 1 \end{cases}$$

Całkujemy obie strony wzgl. y

$$y \cdot u_y = \int 0\,dy = 0 + f(x) = f(x)$$

$$u_y = \frac{f(x)}{y} \qquad u(x,y) = \int \frac{f(x)}{y}\,dy = f(x) \cdot \ln|y| + g(x)$$

$$u(x,1) = f(x) \cdot 0 + g(x) = g(x) = x^2$$

$$u(x,e) = f(x) \cdot 1 + g(x) = f(x) + g(x) = 1 \rightarrow f(x) + x^2 \Rightarrow$$

$$f(x) = 1 - x^2$$

Więc

$$u(x,y) = (1 - x^2) \cdot \ln|y| + x^2$$

Przykład 9 (4)

$$\begin{cases} u_{xx} = 0 \\ u(x,x) = 1 \\ u_y(x,x) = x^2 \end{cases}$$

$u_x = \int 0\,dx = 0 + f(y) = f(y)$

$u(x,y) = \int f(y)\,dx = x f(y) + g(y)$

$u_y(x,y) = x \cdot f'(y) + g'(y)$

ale $u(x,x) = x \cdot f(x) + g(x) = 1$

$u_y(x,x) = x \cdot f'(x) + g'(x) = x^2$

$g(x) = 1 - x f(x)$

$g'(x) = 0 - 1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x) =$

$= -f(x) - x \cdot f'(x)$

$\cancel{x \cdot f'(x)} - f(x) - \cancel{x f'(x)} = x^2$

$-f(x) = x^2 \rightarrow f(x) = -x^2$

$g(x) = 1 - x \cdot f(x) = 1 + x^3$

$f(y) = -y^2$

$g(y) = 1 + y^3$

Ostatecznie $u(x,y) = x \cdot (-y^2) + 1 + y^3$